

# Цифровые модели рельефа при изучении гравитационного поля Земли

Невретдинов Илнур Харисович

ФГБУ Центр геодезии, картографии и ИПД

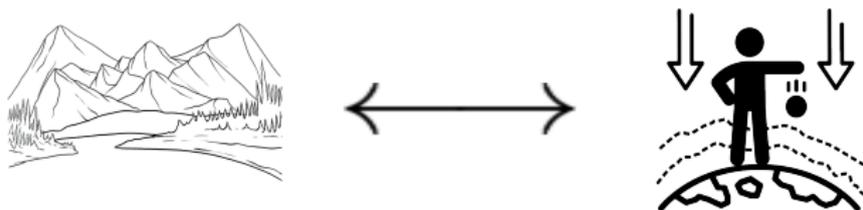
- 1 Теоретические сведения
- 2 Основные формы представления данных о рельефе
  - Регулярная сетка
  - Разложение по сферическим функциям
- 3 Локальное приложение
  - Поправка за рельеф
  - Актуальные вопросы
  - Оценка точности ДТМ и требования к ней
- 4 Заключение

Для чего изучать  
гравитационное поле Земли?

# Основная задача физической геодезии

## Теоретические сведения

Согласно Молоденскому: «...главной задачей геодезии является изучение физической поверхности и внешнего гравитационного поля Земли.»



## Решение задачи

Решение связывает вместе измеренные значения силы тяжести  $g$  на поверхности Земли с её потенциалом:

$$g(\mathbf{h}, B, L) \rightarrow W(\mathbf{h}, B, L).$$





DTM (Digital Terrain Model) – модель поверхности, разделяющей верхнюю границу литосферы и атмосферу, без учёта биосферы и антропосферы.



DSM (Digital Surface Model) – цифровое представление поверхности, характеризующей нижнюю границу атмосферы.

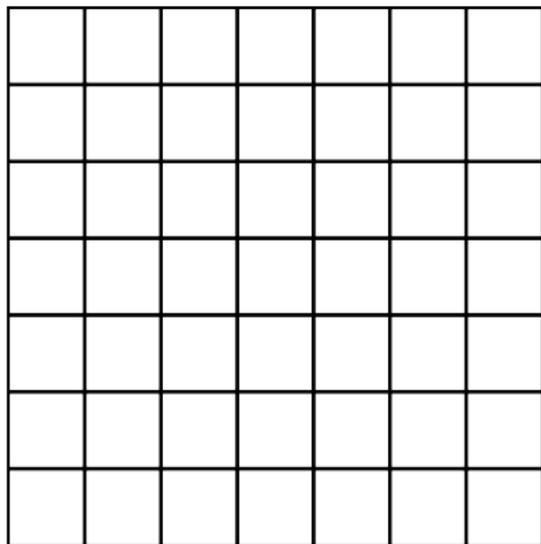


DSM (Digital Surface Model) – цифровое представление поверхности, характеризующей нижнюю границу атмосферы.

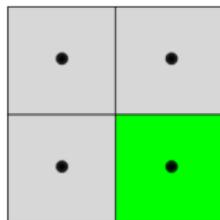
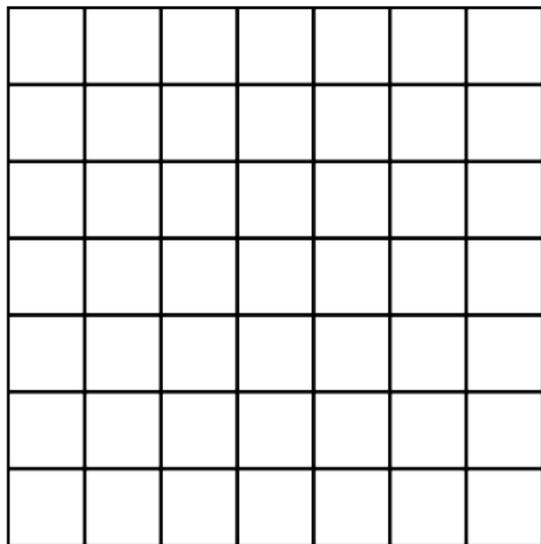
Понятие DSM не фигурирует в классической постановке задачи Молоденского.

# Основные формы представления данных о рельефе

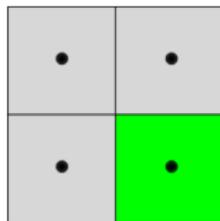
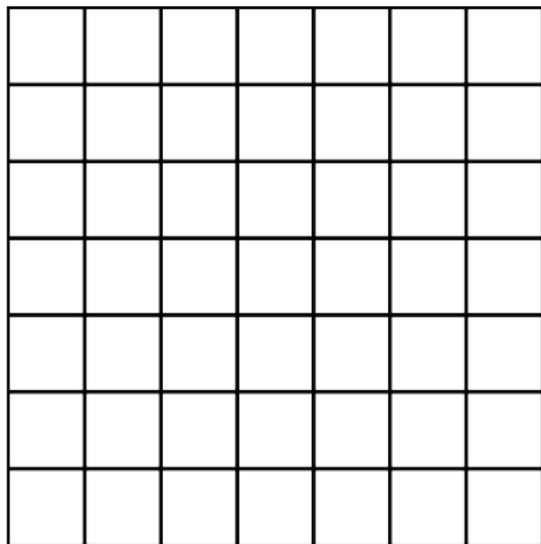
# Двумерная сетка



# Двумерная сетка

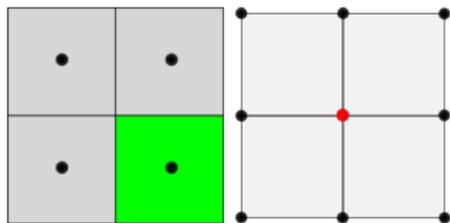
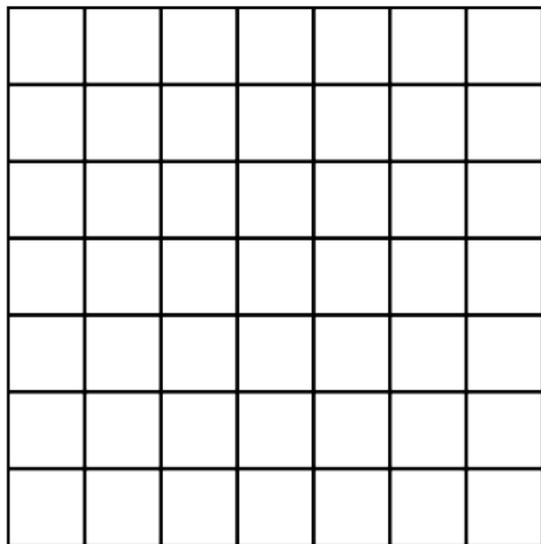


# Двумерная сетка



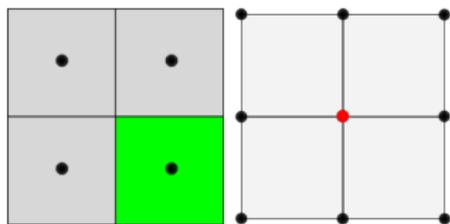
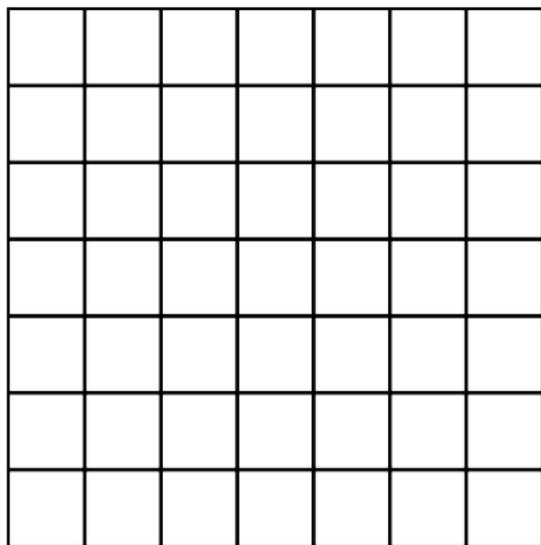
Высота в центре ячейки  
определяется как среднее из всех  
значений в её границах.

# Двумерная сетка



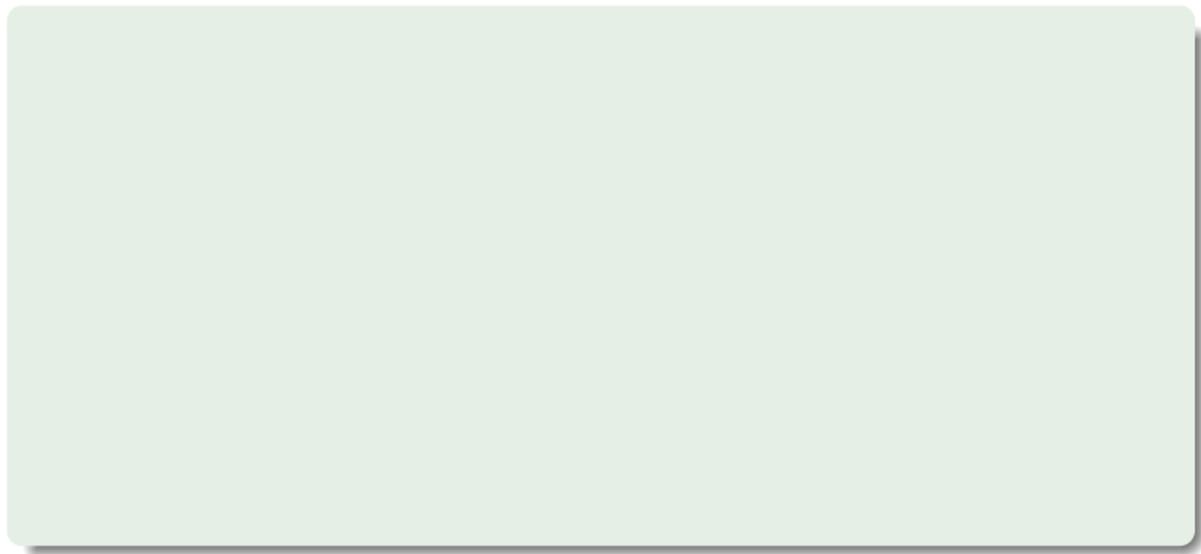
Высота в узле сетки определяется как среднее из всех значений в её границах либо как точечное значение.

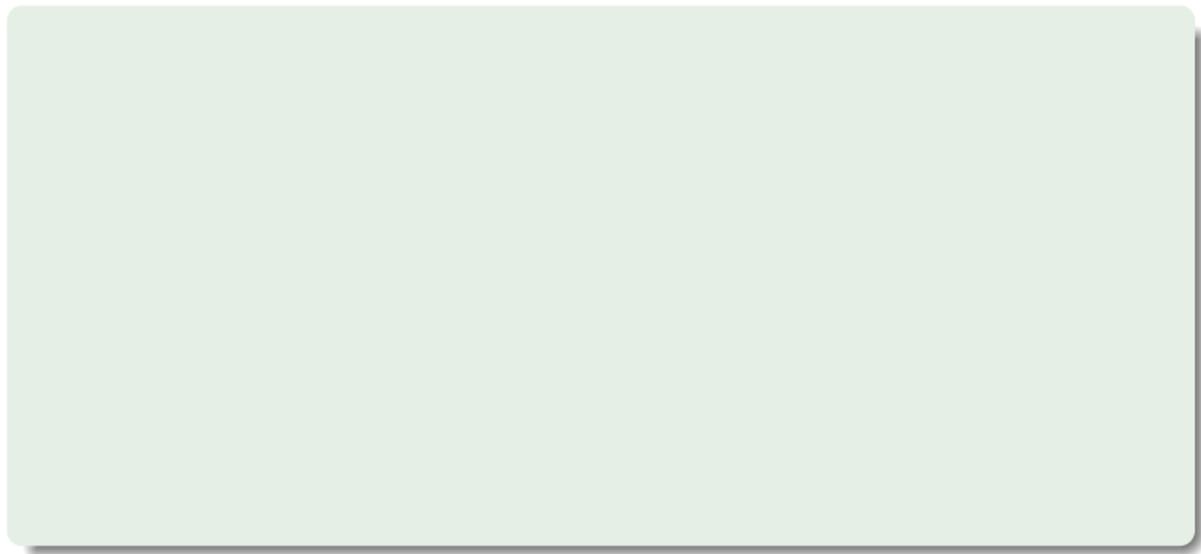
# Двумерная сетка



Высота в узле сетки определяется как среднее из всех значений в её границах либо как точечное значение.

Основные технологии – InSAR, LiDAR,  
фотограмметрические методы.  
Стандартный формат данных для хранения – NetCDF.





- Имеет высокую разрешающую способность, вплоть до 0.5 м.

- Имеет высокую разрешающую способность, вплоть до 0.5 м.
- Возможность обновления.

- Имеет высокую разрешающую способность, вплоть до 0.5 м.
- Возможность обновления.
- Удобно для формирования ДТМ с переменным разрешением.

- Имеет высокую разрешающую способность, вплоть до 0.5 м.
- Возможность обновления.
- Удобно для формирования ДТМ с переменным разрешением.
- Существует надежное ПО для работы (ArcGIS, QGIS).

- Имеет высокую разрешающую способность, вплоть до 0.5 м.
- Возможность обновления.
- Удобно для формирования ДТМ с переменным разрешением.
- Существует надежное ПО для работы (ArcGIS, QGIS).
- Хорошо отражает локальные особенности рельефа.

# Достоинства и недостатки двумерного представления

- Имеет высокую разрешающую способность, вплоть до 0.5 м.
- Возможность обновления.
- Удобно для формирования ДТМ с переменным разрешением.
- Существует надежное ПО для работы (ArcGIS, QGIS).
- Хорошо отражает локальные особенности рельефа.
- Ограничена отображением топографии только некоторой определённой территории.

# Достоинства и недостатки двумерного представления

- Имеет высокую разрешающую способность, вплоть до 0.5 м.
- Возможность обновления.
- Удобно для формирования DTM с переменным разрешением.
- Существует надежное ПО для работы (ArcGIS, QGIS).
- Хорошо отражает локальные особенности рельефа.
- Ограничена отображением топографии только некоторой определённой территории.

**Возможно ли получить значение высоты в месте, не покрываемой моделью рельефа?**



# Аппарат сферических функций

- Любую функцию  $f$ , заданную на сфере, можно представить в виде бесконечного ряда по сферическим функциям:

$$f(\varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda) P_{nk}(\sin \varphi),$$

где  $C_{nk}, S_{nk}$  – определяемые коэффициенты,  $P_{nk}$  – функция Лежандра первого рода.

# Аппарат сферических функций

- Любую функцию  $f$ , заданную на сфере, можно представить в виде бесконечного ряда по сферическим функциям:

$$f(\varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (C_{nk} \cos k\lambda + S_{nk} \sin k\lambda) P_{nk}(\sin \varphi),$$

где  $C_{nk}, S_{nk}$  – определяемые коэффициенты,  $P_{nk}$  – функция Лежандра первого рода.

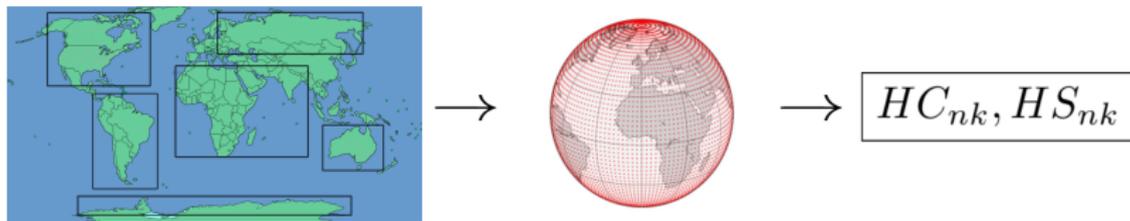
- Для высот земной поверхности имеем:

$$H(\varphi, \lambda) = \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{k=0}^n (HC_{nk} \cos k\lambda + HS_{nk} \sin k\lambda) P_{nk}(\sin \varphi)$$

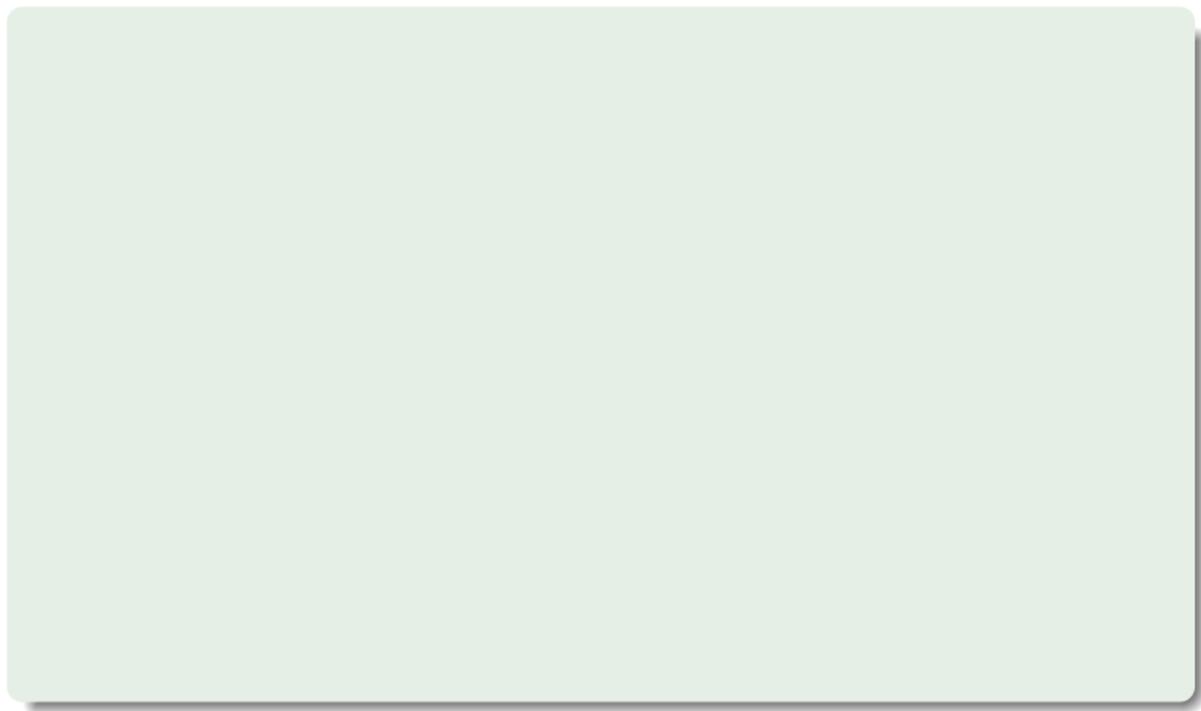
# Гармонический анализ топографии

## Порядок действий

- 1 Сбор данных: региональные и локальные DTM.
- 2 Фильтрация данных и интерполяция высот на регулярную сетку.
- 3 Вычисление коэффициентов разложения по интегральным формулам.



# Достоинства и недостатки спектрального представления



# Достоинства и недостатки спектрального представления

- Есть возможность найти значение функции в любой точке в пространстве вне ограничивающей сферы.

# Достоинства и недостатки спектрального представления

- Есть возможность найти значение функции в любой точке в пространстве вне ограничивающей сферы.
- Достаточно хранить значения только коэффициентов  $HC_{nk}, HS_{nk}$ .

# Достоинства и недостатки спектрального представления

- Есть возможность найти значение функции в любой точке в пространстве вне ограничивающей сферы.
- Достаточно хранить значения только коэффициентов  $HC_{nk}, HS_{nk}$ .
- Данное представление позволяет оценить глобальный гравитационный эффект топографии.

# Достоинства и недостатки спектрального представления

- Есть возможность найти значение функции в любой точке в пространстве вне ограничивающей сферы.
- Достаточно хранить значения только коэффициентов  $HC_{nk}, HS_{nk}$ .
- Данное представление позволяет оценить глобальный гравитационный эффект топографии.
- Позволяет восстановить только определенную часть спектра функции ( $N_{max} \approx 10000$ ).

# Достоинства и недостатки спектрального представления

- Есть возможность найти значение функции в любой точке в пространстве вне ограничивающей сферы.
- Достаточно хранить значения только коэффициентов  $HC_{nk}, HS_{nk}$ .
- Данное представление позволяет оценить глобальный гравитационный эффект топографии.
- Позволяет восстановить только определенную часть спектра функции ( $N_{max} \approx 10000$ ).
- Чтобы вычислить коэффициенты требуется знать значения функции по всей Земле.

# Достоинства и недостатки спектрального представления

- Есть возможность найти значение функции в любой точке в пространстве вне ограничивающей сферы.
- Достаточно хранить значения только коэффициентов  $HC_{nk}, HS_{nk}$ .
- Данное представление позволяет оценить глобальный гравитационный эффект топографии.
- Позволяет восстановить только определенную часть спектра функции ( $N_{max} \approx 10000$ ).
- Чтобы вычислить коэффициенты требуется знать значения функции по всей Земле.
- Ошибки в локальных моделях рельефа влияют на все коэффициенты разложения.

# Модели рельефа и моделирование локального поля силы тяжести

## Приложения в задаче Молоденского

- Решение геодезической краевой задачи требует учёта влияния близлежащего рельефа:

$$g_{topo}(P) \longrightarrow g_{ter}(P) \longrightarrow g_{red}(P) \longrightarrow W(P)$$

Это значит, что вне земной поверхности не должно быть никаких притягивающих масс.

- Для определения  $W$  гравиметрические данные должны быть представлены в виде регулярной сетки.

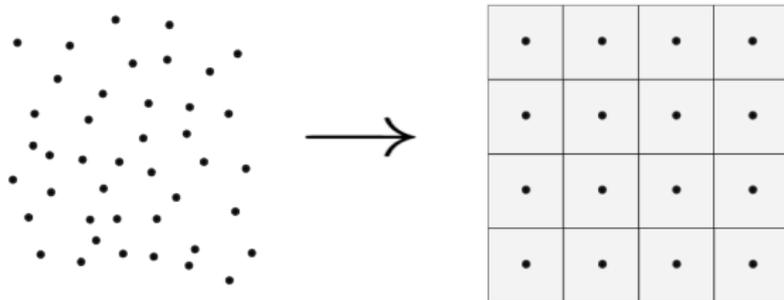
# Приложения в задаче Молоденского

- Решение геодезической краевой задачи требует учёта влияния близлежащего рельефа:

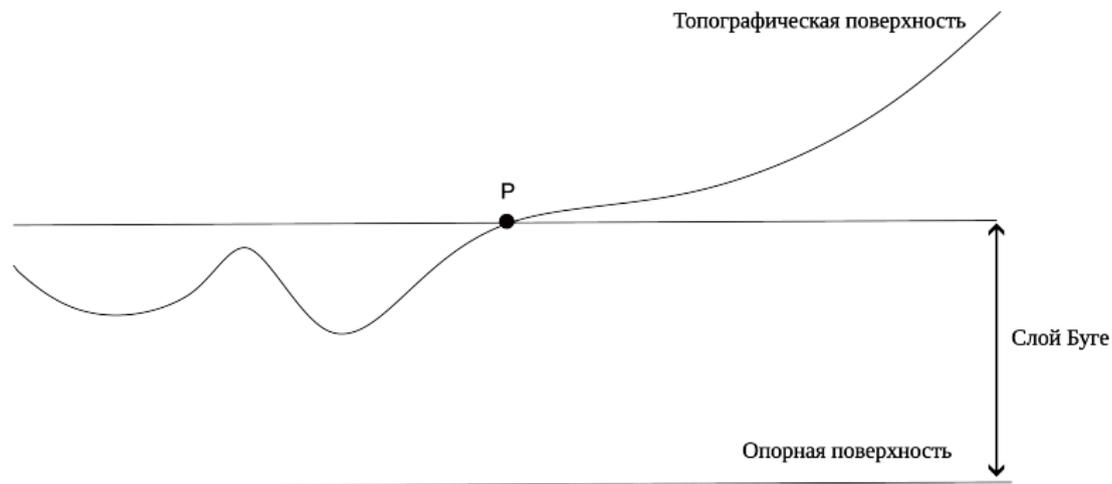
$$g_{topo}(P) \longrightarrow g_{ter}(P) \longrightarrow g_{red}(P) \longrightarrow W(P)$$

Это значит, что вне земной поверхности не должно быть никаких притягивающих масс.

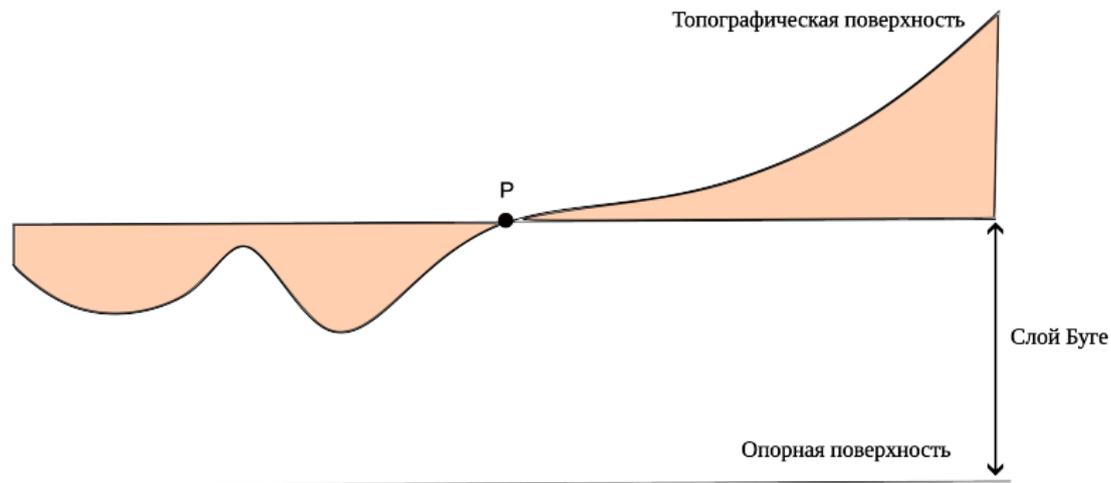
- Для определения  $W$  гравиметрические данные должны быть представлены в виде регулярной сетки.



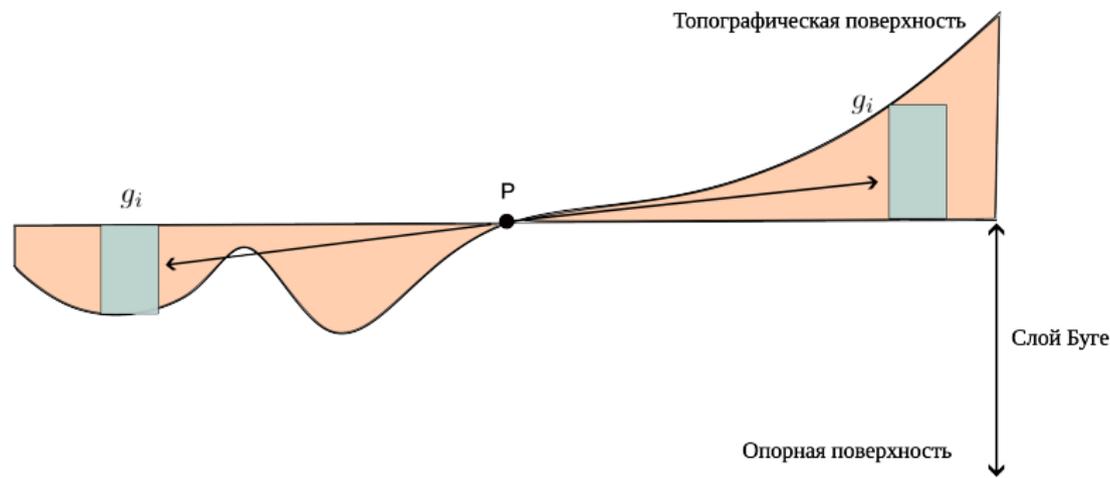
# Поправка за рельеф



# Поправка за рельеф



# Поправка за рельеф



$$\Delta g_{tc}(P) \approx G \sum_{i=0}^N g_i \rho_i,$$

где  $g_i$  – притяжение  $i$ -той элементарной массы.



## Использованная модель рельефа

RuDTM2014<sup>1</sup> с разрешением  $3'' \times 3''$ ,  $\approx 90 \times 90$  метра.

---

<sup>1</sup>I. A. Oshchepkov, RuDTM2014: New digital terrain model for Russia and its effect on the prediction of mean gravity anomalies, 2016

## Использованная модель рельефа

RuDTM2014<sup>1</sup> с разрешением  $3'' \times 3''$ ,  $\approx 90 \times 90$  метра.

## Параметры интегрирования

---

<sup>1</sup>I. A. Oshchepkov, RuDTM2014: New digital terrain model for Russia and its effect on the prediction of mean gravity anomalies, 2016

## Использованная модель рельефа

RuDTM2014<sup>1</sup> с разрешением  $3'' \times 3''$ ,  $\approx 90 \times 90$  метра.

## Параметры интегрирования

- 1 Рельеф аппроксимировался прямоугольными призмами.

---

<sup>1</sup>I. A. Oshchepkov, RuDTM2014: New digital terrain model for Russia and its effect on the prediction of mean gravity anomalies, 2016

## Использованная модель рельефа

RuDTM2014<sup>1</sup> с разрешением  $3'' \times 3''$ ,  $\approx 90 \times 90$  метра.

## Параметры интегрирования

- 1 Рельеф аппроксимировался прямоугольными призмами.
- 2 Их гравитационный эффект оценивался в пределах радиуса интегрирования  $\psi_0 = 1^\circ$ , что в линейной мере соответствует 100 – 110 км.

---

<sup>1</sup>I. A. Oshchepkov, RuDTM2014: New digital terrain model for Russia and its effect on the prediction of mean gravity anomalies, 2016

## Использованная модель рельефа

RuDTM2014<sup>1</sup> с разрешением  $3'' \times 3''$ ,  $\approx 90 \times 90$  метра.

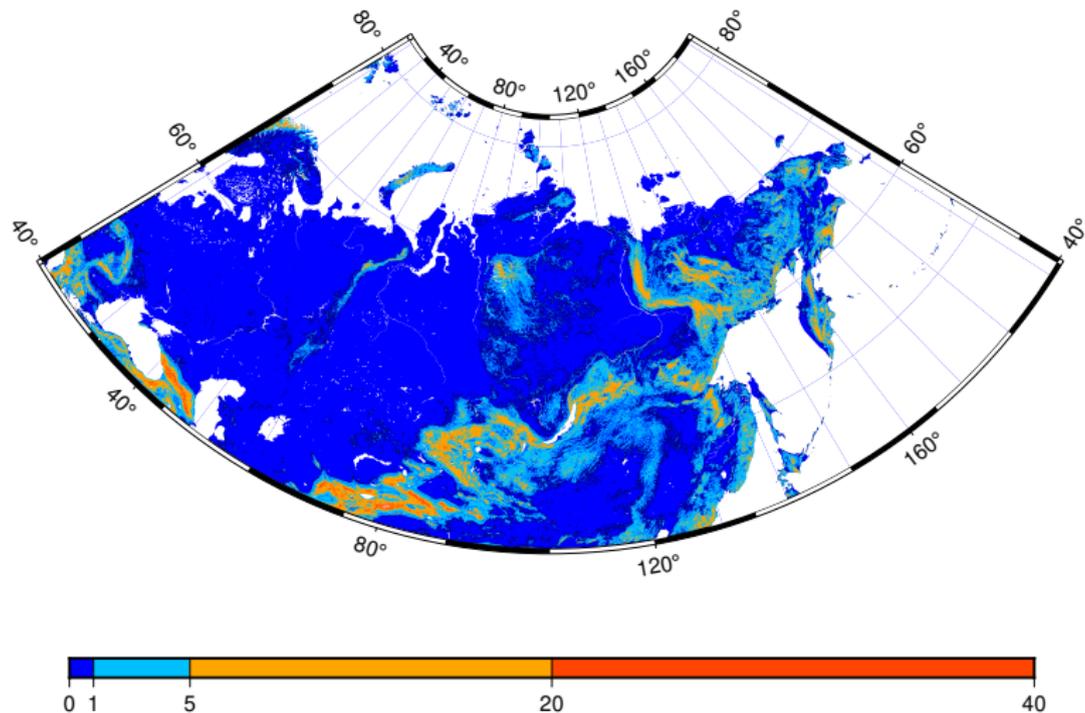
## Параметры интегрирования

- 1 Рельеф аппроксимировался прямоугольными призмами.
- 2 Их гравитационный эффект оценивался в пределах радиуса интегрирования  $\psi_0 = 1^\circ$ , что в линейной мере соответствует 100 – 110 км.
- 3 Плотность топографических масс  $\rho$  принималась равной 2670 кг/м<sup>3</sup> и постоянной на всю область вычислений.

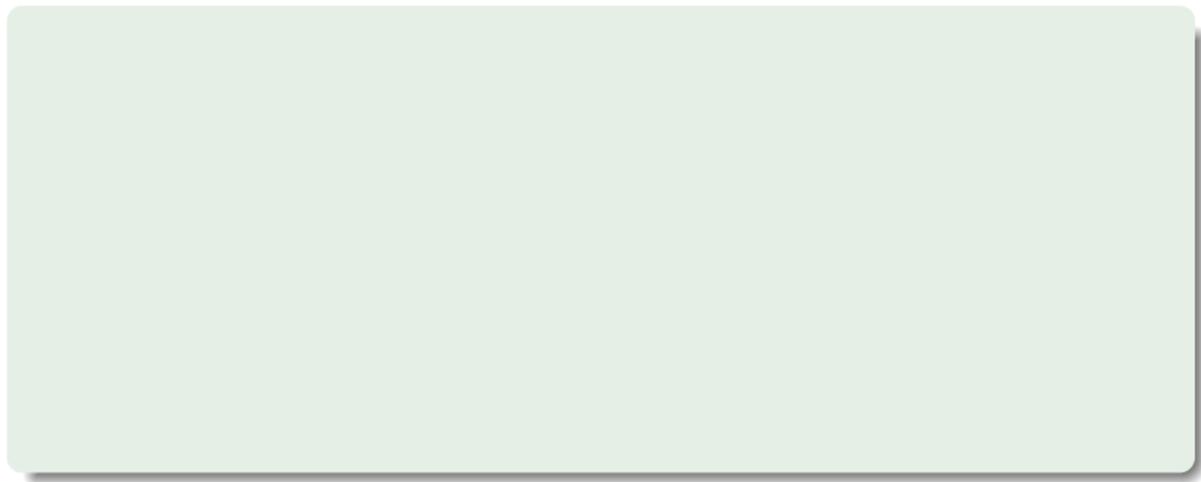
---

<sup>1</sup>I. A. Oshchepkov, RuDTM2014: New digital terrain model for Russia and its effect on the prediction of mean gravity anomalies, 2016

# Результаты вычислений



Единица измерения – миллигал (mGal).



- 1 Нет эталона, топографические редукции не являются измеряемой величиной

# Существующие проблемы

- 1 Нет эталона, топографические редукции не являются измеряемой величиной
- 2 Различные способы дискретизации рельефа дают разные результаты

# Существующие проблемы

- 1 Нет эталона, топографические редукции не являются измеряемой величиной
- 2 Различные способы дискретизации рельефа дают разные результаты
- 3 Использование нескольких моделей рельефа также приводят к различным результатам

# Существующие проблемы

- 1 Нет эталона, топографические редукции не являются измеряемой величиной
- 2 Различные способы дискретизации рельефа дают разные результаты
- 3 Использование нескольких моделей рельефа также приводят к различным результатам
- 4 В теории возможно получить бесконечное число решений

# Существующие проблемы

- 1 Нет эталона, топографические редукции не являются измеряемой величиной
- 2 Различные способы дискретизации рельефа дают разные результаты
- 3 Использование нескольких моделей рельефа также приводят к различным результатам
- 4 В теории возможно получить бесконечное число решений

**Даже если задать некий стандартный алгоритм, как оценить его точность?**

# Существующие проблемы

- 1 Нет эталона, топографические редукции не являются измеряемой величиной
- 2 Различные способы дискретизации рельефа дают разные результаты
- 3 Использование нескольких моделей рельефа также приводят к различным результатам
- 4 В теории возможно получить бесконечное число решений

**Даже если задать некий стандартный алгоритм, как оценить его точность?**

Решение – использовать распространение неопределённости.

# Распространение неопределённости для $\Delta g_{tc}$

## Описание метода

## Описание метода

- Выбранное численное решение преобразуется в формулу для оценки точности интегральной суммы:

$$\Delta g_{tc} \approx G\rho \sum_{i=0}^N g_i \longrightarrow \sigma_{\Delta g_{tc}} \approx \sqrt{\sum_{\Omega} 2\sigma_H^2 \left( \frac{\partial \Delta g_{tc}}{\partial (H' - H)} \right)^2},$$

где  $\sigma_h$  – ошибка высот в модели рельефа.

## Описание метода

- Выбранное численное решение преобразуется в формулу для оценки точности интегральной суммы:

$$\Delta g_{tc} \approx G\rho \sum_{i=0}^N g_i \longrightarrow \sigma_{\Delta g_{tc}} \approx \sqrt{\sum_{\Omega} 2\sigma_H^2 \left( \frac{\partial \Delta g_{tc}}{\partial (H' - H)} \right)^2},$$

где  $\sigma_h$  – ошибка высот в модели рельефа.

- Учёт неопределённости высот в модели рельефа можно дать оценку 60 – 70% суммарной ошибки вычисленной редукции.

## Описание метода

- Выбранное численное решение преобразуется в формулу для оценки точности интегральной суммы:

$$\Delta g_{tc} \approx G\rho \sum_{i=0}^N g_i \longrightarrow \sigma_{\Delta g_{tc}} \approx \sqrt{\sum_{\Omega} 2\sigma_H^2 \left( \frac{\partial \Delta g_{tc}}{\partial (H' - H)} \right)^2},$$

где  $\sigma_h$  – ошибка высот в модели рельефа.

- Учёт неопределённости высот в модели рельефа можно дать оценку 60 – 70% суммарной ошибки вычисленной редукции.
- Нужны оценка точности модели рельефа, как её получить?



- Основной метод – сравнение высот из модели рельефа с данными нивелирования:

$$\sigma_h = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\Delta h_i - \bar{\Delta h})^2},$$

где  $n$  – число контрольных пунктов.

- Основной метод – сравнение высот из модели рельефа с данными нивелирования:

$$\sigma_h = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\Delta h_i - \bar{\Delta h})^2},$$

где  $n$  – число контрольных пунктов.

- Современные глобальные модели рельефа (SRTM, MERIT) имеют точность представления высоты на уровне 5 – 15 метров.

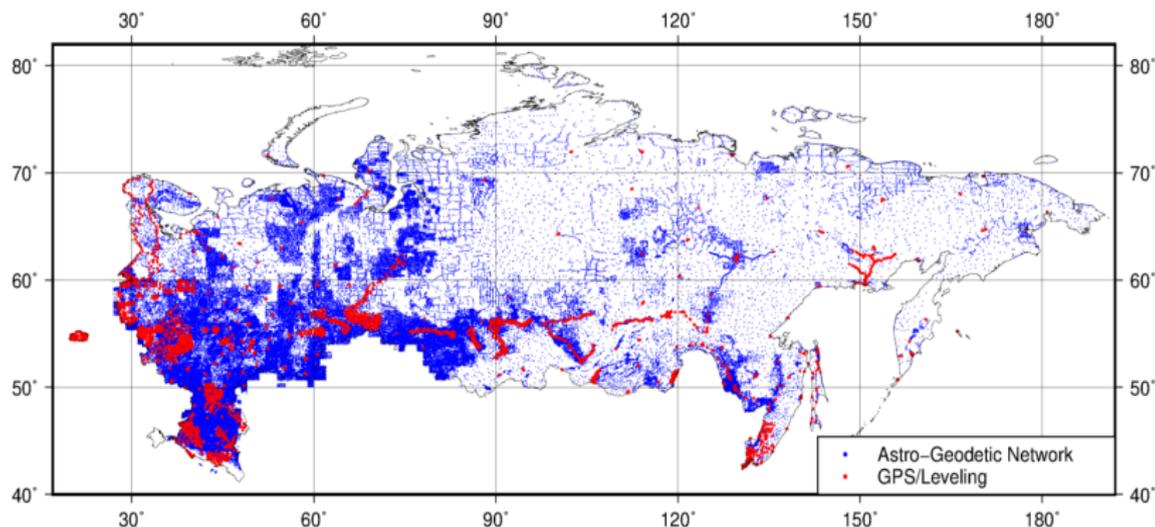
- Основной метод – сравнение высот из модели рельефа с данными нивелирования:

$$\sigma_h = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\Delta h_i - \bar{\Delta h})^2},$$

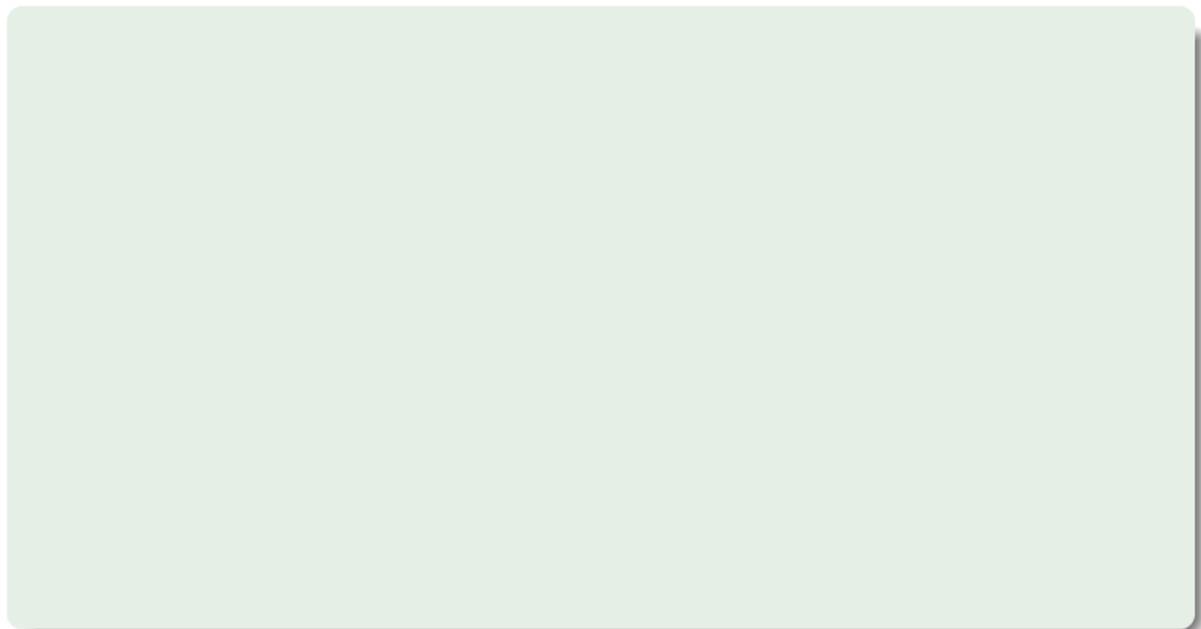
где  $n$  – число контрольных пунктов.

- Современные глобальные модели рельефа (SRTM, MERIT) имеют точность представления высоты на уровне 5 – 15 метров.
- Данные о точности координатной привязки обычно не предоставляются.

# Контрольные пункты для RuDTM2014



Полученная величина  $\sigma_h$  достигает 3 – 4 метров.



- Используются данные нивелирования, работы по которым проводились в большинстве стран мира.

- Используются данные нивелирования, работы по которым проводились в большинстве стран мира.
- Нивелирные сети имеют хорошее покрытие территории, даже в труднодоступных регионах.

## Преимущества и недостатки

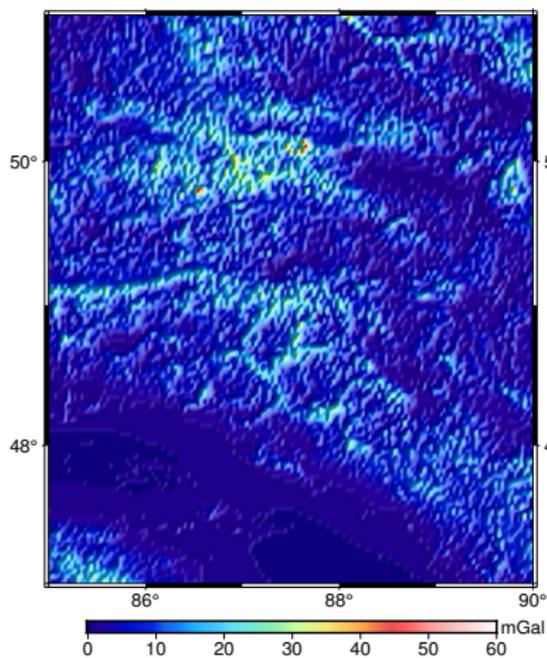
- Используются данные нивелирования, работы по которым проводились в большинстве стран мира.
- Нивелирные сети имеют хорошее покрытие территории, даже в труднодоступных регионах.
- Но этой плотности недостаточно, чтобы получить локализованную неопределённость  $\sigma_h(B, L)$ , потому определяют только некоторую общее значение  $\sigma_h$ .

# Преимущества и недостатки

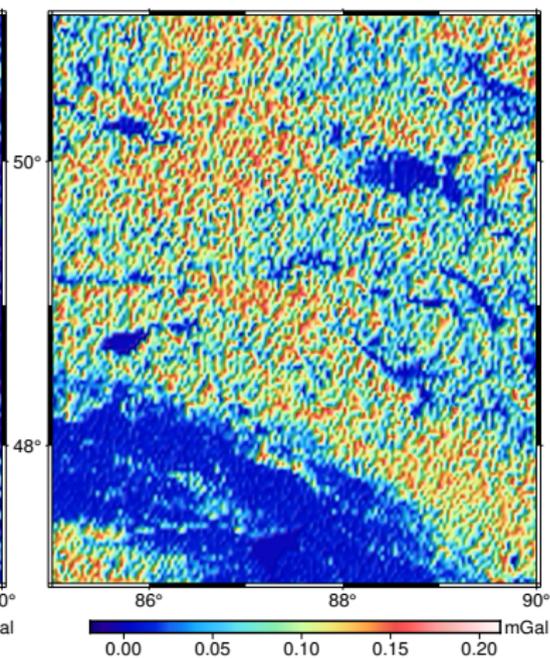
- Используются данные нивелирования, работы по которым проводились в большинстве стран мира.
- Нивелирные сети имеют хорошее покрытие территории, даже в труднодоступных регионах.
- Но этой плотности недостаточно, чтобы получить локализованную неопределённость  $\sigma_h(B, L)$ , потому определяют только некоторую общее значение  $\sigma_h$ .
- Нивелирные сети подвержены систематическим погрешностям неизвестного происхождения, для территории РФ они могут достигать 70 см (Дальний Восток).

# Пример вычислений для Алтайского региона

Поправка за рельеф  $\Delta g_{tc}$



Её ошибка при  $\varepsilon_h = 5 \text{ m}$



# Требования к моделям рельефа

## Глобальные и региональные приложения

Разрешающая способность – на уровне 50 – 100 км,  $\sigma_h$  порядка 50 м, точность координатной привязки – 500 метров.  
Пример – ETOPO2012.

# Требования к моделям рельефа

## Глобальные и региональные приложения

Разрешающая способность – на уровне 50 – 100 км,  $\sigma_h$  порядка 50 м, точность координатной привязки – 500 метров.  
Пример – ETOPO2012.

## Локальные приложения

Разрешающая способность – на уровне 90 м,  $\sigma_h$  порядка 10 м, точность координатной привязки – 20 метров.  
Пример – SRTM90\_V4.

# Требования к моделям рельефа

## Глобальные и региональные приложения

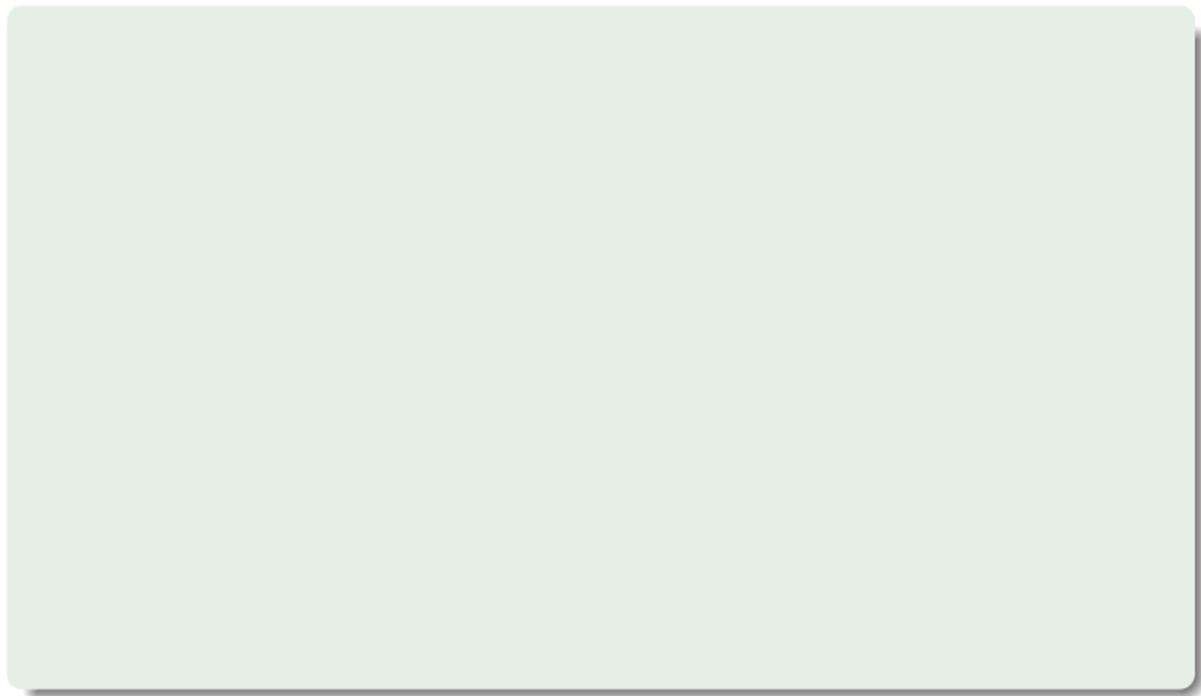
Разрешающая способность – на уровне 50 – 100 км,  $\sigma_h$  порядка 50 м, точность координатной привязки – 500 метров.  
Пример – ETOPO2012.

## Локальные приложения

Разрешающая способность – на уровне 90 м,  $\sigma_h$  порядка 10 м, точность координатной привязки – 20 метров.  
Пример – SRTM90\_V4.

## Ультралокальные приложения

Разрешающая способность – на уровне 1 м,  $\sigma_h$  порядка 0.5 м, точность координатной привязки – 1 м.  
Пример – локальные съёмки с LiDAR.



- Использование модели рельефа не потеряло своей актуальности и по сей день.

- Использование модели рельефа не потеряло своей актуальности и по сей день.
- В приложении к геодезической науке это тесно связано с задачей определения внешнего гравитационного поля Земли.

- Использование модели рельефа не потеряло своей актуальности и по сей день.
- В приложении к геодезической науке это тесно связано с задачей определения внешнего гравитационного поля Земли.
- Для большинства задач необходима ДТМ с высокой плотностью и точностью.

- Использование модели рельефа не потеряло своей актуальности и по сей день.
- В приложении к геодезической науке это тесно связано с задачей определения внешнего гравитационного поля Земли.
- Для большинства задач необходима ДТМ с высокой плотностью и точностью.
- Необходима разработка эффективного и надёжного ПО для вычисления гравитационного эффекта топографии.

- Использование модели рельефа не потеряло своей актуальности и по сей день.
- В приложении к геодезической науке это тесно связано с задачей определения внешнего гравитационного поля Земли.
- Для большинства задач необходима ДТМ с высокой плотностью и точностью.
- Необходима разработка эффективного и надёжного ПО для вычисления гравитационного эффекта топографии.
- Наличие больших объёмов информации о биосфере и антропосфере ставит под вопрос классическую постановку задачи Молоденского.

- Использование модели рельефа не потеряло своей актуальности и по сей день.
- В приложении к геодезической науке это тесно связано с задачей определения внешнего гравитационного поля Земли.
- Для большинства задач необходима ДТМ с высокой плотностью и точностью.
- Необходима разработка эффективного и надёжного ПО для вычисления гравитационного эффекта топографии.
- Наличие больших объёмов информации о биосфере и антропосфере ставит под вопрос классическую постановку задачи Молоденского.